Datateknikklinjen KTH

MacDrawboard

En applikation för tillämpad projektiv geometri

Projektuppgift i kursen DB330 PMI, 1988

Niklas Andersson D85
Magnus Berg D85
Mats Danielson D85
Dennis Gyllensporre D85
Catrin Johnson D85
Åke Järvklo D85
Tommy Levitte F86
Dorit Paltzer D86

Projekthandledare och beställare
Ambjörn Naeve
NADA-Matematik/KTH

Projektiv geometri, en kort introduktion.

Vad är MacDrawboard?

MacDrawboard är ett Macintoshprogram avsett för interaktiva studier av geometriska relationer i det reella, tvådimensionella, projektiva planet $\mathcal{P}^2$. Det projektiva planet är en utvidgning av det euklidiska (affina) planet, i vilket två linjer alltid skär varandra i en punkt. Skärningspunkten för två parallella linjer sägs t.ex. befinna sig "i oändligheten". För en utförligare introduktion se [1] eller [2].

I MacDrawboard är det möjligt att följa en geometrisk konstruktions "historia". Man kan betrakta konstruktionen som ett växelspel mellan slumpmässiga val och kanonisk konstruktion. Varje geometriskt objekt kan därför på ett naturligt sätt tillordnas en mängd "barn" och en mängd "föräldrar". Observera att ett fritt (slumpmässigt) valt objekt saknar föräldrar, och att endast den sist skapade "släktingen" i en relationskedja saknar barn.

Exempel:

Betrakta de fritt valda punkterna P och Q i planet, samt linjen L dragen mellan P och Q (fig 1, överst).

L är beroende av P och Q.
L är "barn" till P och Q.
P och Q är "föräldrar" till L.

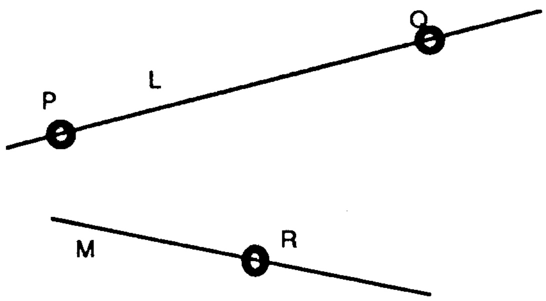


fig 1: Exempel på arvsanlag hos objekt

MacDrawboard gör det möjligt att förändra historien bakom en given konstruktion på ett konsistent sätt, dvs så att en en ändring vid en viss tidpunkt i konstruktionen fortplantas framåt i tiden till alla efterföljande generationer av barn, barnbarn etc. Detta är logiskt sett ingen oproblematisk uppgift, eftersom man lätt kan tänka sig ändringar som rycker undan den geometriska grunden för senare steg i konstruktionskedjan. Om man t.ex. flyttar punkten P ovan så att den sammanfaller med punkten Q, så upphör linjen L att existera. Denna sorts ändringar är inte tillåtna i MacDrawboard. Det är även inkonsistent att ändra typen hos ett objekt.

Exempel:
Man kan inte flytta bort punkten R som har linjen M som förälder från M, utan bara längs med M (fig 1).
Det går heller inte att flytta linjen L bort från sina föräldrar, punkterna P och Q.
Däremot påverkar en flyttning av antingen P eller Q givetvis L.

De olika objekten i MacDrawboard.

För att kunna genomföra en uppdatering av en geometrisk konstruktion vid en konsistent ändring i något mellansteg, krävs det tillgång till en hel hierarki av olika koordinatsystem som beskriver dels läge hos varje objekt,relativt sina föräldrar. MacDrawboard arbetar i dag med två typer av objekt, punkter och linjer. Dessa kallas för de två supertyperna i MacDrawboard.

Punkterna är av tre typer:
Fria punkter (FP), dvs punkter utan föräldrar.
Punkt på en linje (P1L).
Punkt på två linjer (P2L).

Linjerna är också av tre typer:
Fria linjer (FL), dvs punkter utan föräldrar.
Linje på en punkt (L1P).
Linje på två Punkter (L2P).

Punkternas läge i planet specificeras av deras koordinater (x:y:z) i punkt-superbasen.
Linjernas läge i planet specificeras av deras koordinater (u:v:w) i linje-superbasen.

Superbaserna och deras beroenden

Punkt-superbasen består av fyra punkter, varav tre ej får ligga i linje, som ges av koordinaterna
(1:0:0)
(0:1:0)
(0:0:1)
samt enhetspunkten (1:1:1)

Linje-superbasen består av fyra linjer, varav tre ej får skära varandra i en punkt, som ges av koordinaterna
(1:0:0)
(0:1:0)
(0:0:1)
samt enhetslinjen (1:1:1).

Superbaserna väljes "i praktiken" så att koordinat-trianglarna för punkter och linjer sammanfaller, dvs så att t.ex. punkten (1:0:0) står mot linjen (1:0:0) etc. och så att enhetspunkten och enhetslinjen befinner sig i ett s.k. trilinjärt pol-polar läge med varandra.se [1]. Detta medför att en punkt (x:y:z) ligger på linjen (u:v:w) omm ux+vy+wz=0.

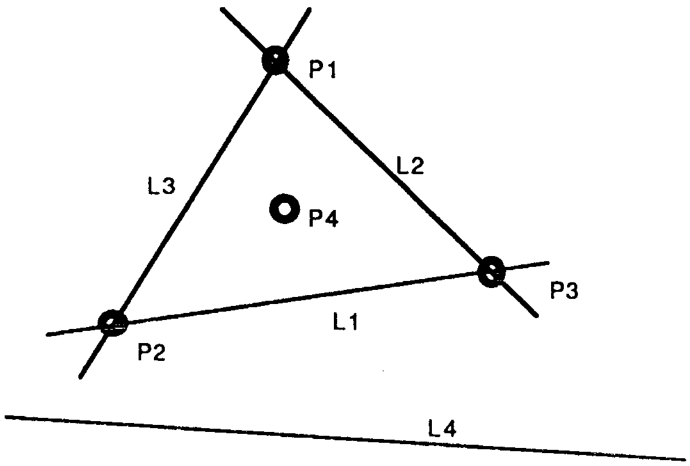


Fig 2: Superbas

Dualisering

Den projektiva geometrin är invariant under dualiseringar, dvs man kan byta ut orden punkter mot linjer och vice versa utan att systemet blir inkonsistent. Detta beror på att den projektiva geometrins axiomsystem har en symmetri som leder till att punkter och linjer kan beskrivas med exakt samma algebra. Varje teorem eller konstruktion har därför en dual motsvarighet, som för ögat kan se annorlunda ut, men som kan erhållas "mekaniskt" genom att konsekvent byta plats på begreppen punkter och linjer i varje konstruktionssteg.

Dubbelförhållande

Givet tre punkter A, B och C på en linje L, karakteriseras varje punkt P på L av sitt dubbelförhållande (λ) relativt dessa tre. Ett dubbelförhållande räknas ut med hjälp av formeln:

$\lambda = \dfrac{PA/PB}{CA/CB}$ där PA är det riktade avståndet från A till P etc.

Notera att om :
- P=A så är $\lambda = 0$
- P=B så är $\lambda = \infty$
- P=C så är $\lambda = 1$

Fig 3: Dubbelförhållande

Dubbelförhållandet används i den projektiva geometrin därför att det, till skillnad mot "vanliga avstånd", är projektivt invariant (dvs det förändras inte under perspektiva projektioner).

Denna invarians innebär bl.a. att den duala situationen (fyra linjer på en punkt) kan tillordnas ett dubbelförhållande. Man skär helt enkelt de fyra linjerna med en godtyckligt vald linje, som ej går genom den gemensamma punkten, och beräknar sedan dubbelförhållandet för motsvarande fyra skärningspunkter.

$$\lambda = \frac{PA/PB}{CA/CB} = \frac{P'A'/P'B'}{C'A'/C'B'} = \lambda'$$

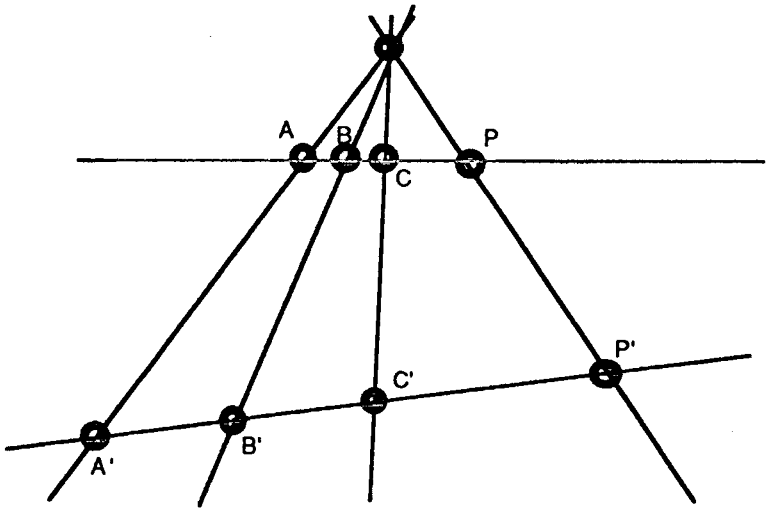


fig 4: Dualisering

Vi kan nu beskriva koordinatsystemen för P1L och L1P:

Varje linje L har en bas av tre punkter som kallas 0, ∞ och 1. Varje punkt P på L beskrivs sedan av sitt dubbelförhållande relativt dessa tre.

Varje Punkt P har en bas av tre linjer som kallas 0, ∞ och 1. Varje Linje L på P beskrivs sedan av sitt dubbelförhållande relativt dessa tre.

I Macdrawboard lagras alla objekt som dualer, dvs för varje objekt finns en indikator som anger dess nuvarande representation (punkt eller linje). Detta medför att man med MacDrawboard enkelt kan välja att studera sin konstruktion i dess duala representation. Mer om detta senare.

Om MacDrawboard...

MacDrawboard utvecklades av teknologer vid Datatekniklinjen på KTH som en projektuppgift i kursen Programmeringsmiljöer och interaktivitet. MacDrawboard följer därför så nära det är möjligt riktlinjerna i "Macintosh userinterface guidelines". Detta innebär att en användare som tidigare använt Macintosh lätt kan köra programmet utan utförligare instruktioner. Den enda standardmässiga begränsning som finns idag, är att man inte kan skriva ut sina alster på skrivare. MacDrawboard är avsett att köras på en Macintosh II med matematikprocessor.
Den geometriska representationstekniken bakom MacDrawboard har utvecklats av Ambjörn Naeve, som även har skrivit den matematiska beräkningskärnan i programpaketet. Projektets målsättning var - förutom att producera en interaktiv, grafiskt avancerad användarmiljö - även att ta fram ett välspecificerat gränssnitt mellan den portabla matematikkärnan och den maskinberoende grafiken.
MacDrawboard är skrivet i MPV Object Pascal, med användande av MacApp applikationsskelett. Matematikrutinerna utvecklades i C under Unix, och portades som en del av projektet till MPW C på Macintosh II.Stort arbete lades ned innan vi fick C och Pascal att kommunicera med varandra, och minst lika stort arbete lades ned på att upptäcka hur man undviker de numeriska buggarna i den kod som MPW C genererar.

Hur man använder MacDrawboard

Allmänt

Kommandon till MacDrawboard ges på två olika sätt, dels med hjälp av Paletten till vänster i inmatningsfönstret, och dels genom vanliga menykommandon. Paletten används för att grafiskt skapa olika objekt. Palettkommandona ställer tillfälligt MacDrawboard i dedicerade inmatningsmoder t.ex. för skapande av en punkt eller en linje. Menyerna används främst för numerisk inmatning av de olika objektens koordinater, samt de speciella kommandon (t.ex. inställning för dual representation i fönstren) som inte lämpar sig för grafisk representation i paletten.

Att börja använda MacDrawboard

MacDrawboard startas från Finder, genom att man dubbelklickar på ikonen för MacDrawboard. Man kan även öppna en tidigare sparad konstruktion, genom att dubbelklicka på dess ikon.

Att skapa och redigera fria objekt

Att grafiskt skapa en fri punkt i grundfönstret är enkelt. Man klickar en gång på bilden för fri punkt i paletten(till vänster i grundfönstret). Därefter klickar man en gång till på den plats där man vill att punkten skall hamna. Om man i stället för att bara klicka håller musknappen nere,kan man flytta runt punkten i grundfönstret tills man placerat den där man vill ha den.

En fri linje skapas grafiskt genom att man definierar en s.k. ankarpunkt, och därefter "drar ut" en linje från denna. Man klickar först en gång på bilden för en fri linje i paletten. Därefter flyttar man markören till det ställe där man vill ha sin ankarpunkt, och drar i den riktning man vill ha sin linje. Håller man sedan musknappen nertryckt, kan man rotera sin linje kring ankarpunkten tills man är nöjd.

Om man sedan vill, kan man redigera objektets koordinater, samt namnsätta det. Detta gör man genom att dubbelklicka på objektet, varvid man får upp följande dialog (fig 5). I det första fältet kan man döpa objektet, de övriga tre är objektets normerade koordinater.

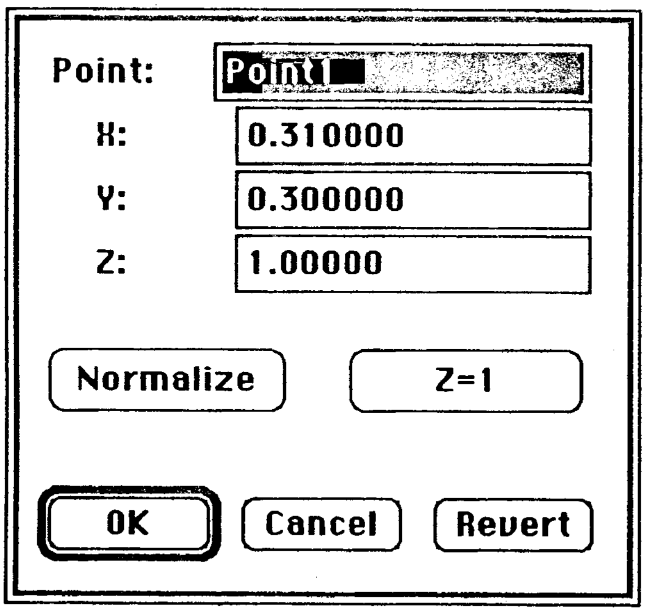


fig 5: Dialog för fritt objekt (punkt)

Observera att alla namn i MacDrawboard måste vara unika, dvs det får inte finnas två objekt som har samma namn.

Knapparna normalize och Z=1 användes till att transformera koordinaterna till normerat koordinatsystem (normalize) eller koordinater i Z=1-planet. Normalt räknar MacDrawboard med normerade koordinater, dvs det som matas in transformeras automatiskt till detta format när du trycker Ok. Därför kan det hända att man får oväntade numeriska värden om man öppnar dialogen igen direkt efter en inmatning.

Ändrar man objektets koordinater i dialogrutan, så förflyttas givetvis objektet till dessa. Vill man skapa ett objekt genom att definiera dess koordinater numeriskt från början, skapar man det i stället genom att i Edit menyn välja" Create free point" resp." Create free line".

Om man senare skulle vilja ändra objektets koordinater, kan man göra det antingen numeriskt eller grafiskt. Grafiskt flyttar man en fri punkt genom att "ta tag i den" med markören och flytta den dit man vill. En fri linje flyttar man genom att "sätta ner" markören på det ställe på linjen där man vill ha sin ankarpunkt, och sedan dra markören, med musknappen nertryckt, tills man är nöjd.

Numeriskt kan man ändra sitt objekt på två sätt. Antingen kan man dubbelklicka på det, eller också kan man markera objektet genom att klicka en gång på det - och sedan välja menykommandot Information från Displaymenyn.

Hur man skapar och redigerar objekt med en förälder.

Varje objekt i MacDrawboard kan ensamt bli förälder till ett nytt objekt. Objekt med en förälder definieras genom ett dubbelförhållande som anges gentemot föräldern och dess interna bas (Intbase). Ett dubbelförhållande lagras i MacDrawboard som en vektor av två decimaltal.

En punkt som ligger på en linje skapas grafiskt genom att man klickar rätt bild i paletten, och därefter sätter ner marikören på den linje som skall bli förälder. Därefter kan man förflytta punkten längs dess förälder tills man placerat den där man vill ha den. En linje genom en punkt skapas på motsvarande sätt. Man använder då föräldern som ankarpunkt vid utplacerandet.

Skapa ett objekt numeriskt, med en förälder, gör man genom att först markera föräldern genom att klicka en gång på den, och sedan ge kommandot "Create point on one line" eller "Create line on one point" i Editmenyn. Även objekt bundna till en förälder kan undersökas och redigeras numeriskt genom att man dubbelklickar på dem. Man kan givetvis även markera dem och använda Displaymenyns kommando Information.

OBS Intbase har idag ingen funktion

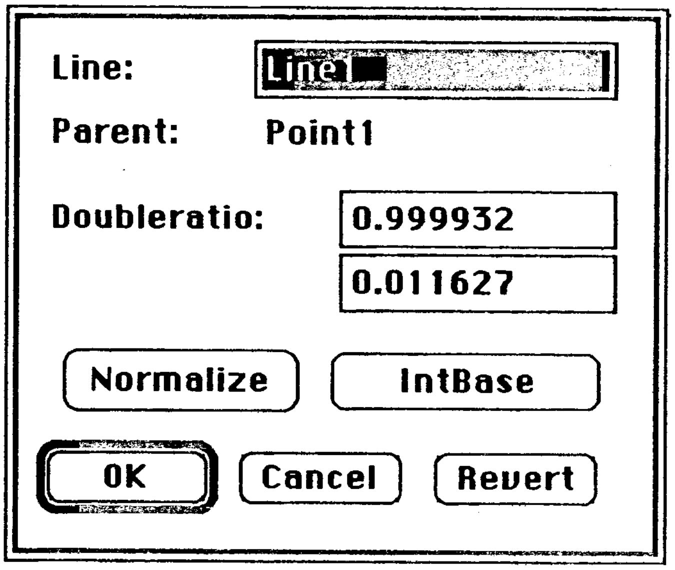


fig 6: Dialog för objekt (linje) med en förälder

Objekt med två föräldrar

Ett objekt med två föräldrar, kan skapas Grafiskt eller genom menykommando. Grafiskt genom att man klickar i paletten och därefter klickar först den ena, och sen den andra föräldern.

Om man vill använda menykommando för att skapa ett objekt med två föräldrar, markerar man först den ena föräldern genom att klicka på den. Sedan shift-klickar man på den andra föräldern, dvs man håller ner shift-tangenten när man klickar den andra föräldern.Därefter väljer man "Create line on two points" eller "Create Point on two lines" ur Edit-menyn, varvid man får upp dialogen i fig 7.

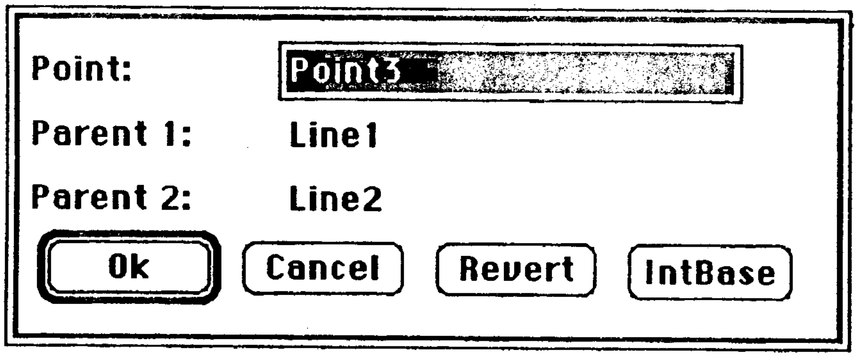


fig 7: Dialog för objekt(punkt) med två föräldrar

Observera att bägge föräldrarna måste vara av samma typ.

Det enda man för närvarande kan redigera hos ett objekt med två föräldrar är dess namn. Antingen dubbelklickar man objektet, eller också markerar man det, och väljer Information ur displaymenyn (se ovan).

OBS Intbase har idag ingen funktion

Koordinater i MacDrawboard

MacDrawboard lagrar alla koordinater normerade (dvs längden av alla vektorer sätts till 1). man har dock möjlighet att mata in koordinater i Z=1-planet, för att få en lite enklare representation av ett x-y-koordinatsystem.

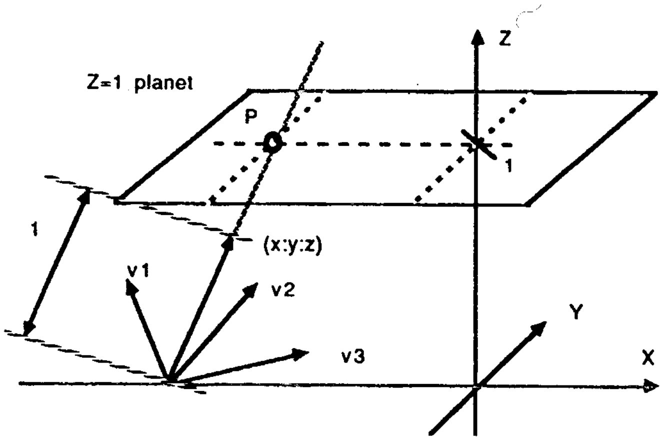


Fig 8, Normerade koordinater

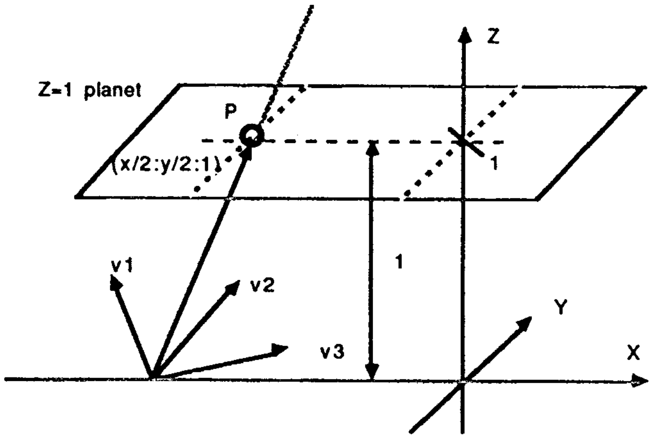


Fig 9, Z=1 koordinater

Transformering och transformfönster

I MacDrawboard kan man undersöka hur en skapad konstruktion ser ut från ett annat perspektiv. Man kan skapa sig en transformerad vy. Denna vy kan man skapa på två olika sätt. Antingen genom att numeriskt ange superbasen för den nya vyn, eller också genom att klicka ut fyra baspunkter i det fönster som skall innehålla den transformerade vyn. Tillängliga kommandon:

"Transform from this window" i Display-menyn. Tar upp de (upp till fyra) markerade objektens koordinater i en dialogruta, och ger användaren möjlighet att numeriskt mata in önskade värden för den nya basen.
(ordning 1:0:0-, 0:1:0-, 0:0:1- och 1:1:1-punkten)

"Transform in new window", också i Display-menyn öppnar ett nytt fönster med samma bas som huvudfönstret, och låter användaren klicka de fyra punkter som bildar din nya bas (ordning 1:0:0-, 0:1:0-, 0:0:1- och 1:1:1-punkten).

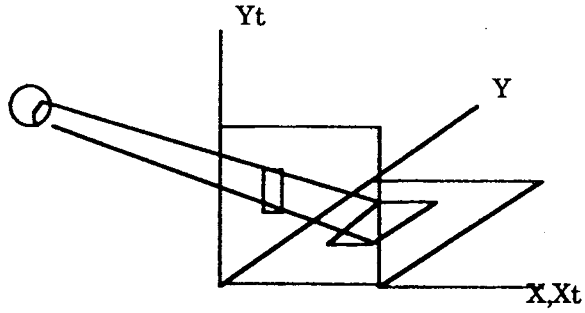


Fig 10, Transformerad vy

Bildrullningar (Scroll)

Eftersom MacDrawboard arbetar i ett oändligt plan, beter sig MacDrawboard lite annorlunda vid bildrullningar än man är van vid från andra Macintoshtillämpningar. I MacDrawboard är det så, att man när man flyttar rullningsrutan nära kanten av fönsterlisten, så hoppar den tillbaka till mitten av fönsterlisten, vilket möjliggör oändligt rullningsområde.

Förstoring och förminskning av innehållet i vyn (zoom)

Genom att väja kommandona "Zoom in" respektive "Zoom out" från Display-menyn, kan man reglera hur noggrannt man vill undersöka objekten i det aktuella fönstret.

Undersökning av en konstruktions duala representation

Genom att välja ett av kommandona "Normal" eller "Inverted" ur Display-menyn, kan man ställa om MacDrawboard för visning av sin konstruktions duala representation ("Inverted") , eller dess normala representation ("Normal") i samtliga fönster.

Några tips vid användandet av MacDrawboard

- Alla fönster i MacDrawboard är aktiva. Genom detta möjliggjörs t.ex. manipulation av en konstruktion i dess transformerade vy, dvs. Man kan t.ex. flytta enskilda objekt oavsett i vilket fönster man befinner sig

- Om två objekt skulle hamna på exakt samma ställe på skärmen i någon representation, kan man komma åt det undre objektet genom att -klicka på det.

Appendix 1
Litteraturhänvisningar

[1] Winger: An introduction to Projective Geometry (Dover)
[2] Courant & Robbins: What is mathematics? (Oxford)
[3] Karush: Matematisk uppslagsbok (W&W)
[4] Coexter: The Real Projective Plane (Cambridge)
[5] Klein: Höhere Geometrie (Chelsea)

Appendix 2
Liten projektivgeometrisk ordlista

Affina problem

Geometriska problem, som behandlar egenskaper invarianta (oförändrade) under affina avbildningar. Hit hör problem om linjer och linjers parallellitet, om mediamner och över huvud taget problem, i vilka delningsförhållandet är inblandat. Problem om sträckors längder och vinklars mått är metriska problem.

Affint plan

Benämning på ett vanligt plan, i kontrast till ett projektivt plan, som erhålls genom tillägg av de s.k. oändlighetspunkterna.

Centralprojektion

Låt p och p' vara två plan i rummet och T en punkt, som inte ligger på p eller p'. Om en rät linje dras genom T, skär denna i allmänhet p och p' i två punkter mellan P och P'. Motsvarigheten mellan P och P' är en avbildning av planet p på planet p'. Denna kallas en centralprojektion i rummet av planet p på planet p' (vid en centralprojektion i planet är p och p' två linjer i detta plan och T en punkt som också ligger där). T kallas projektionscentrum. Det är, som figuren visar, inte nödvändigt att varje punkt i p har en bild i p', eller att varje punkt i p' är en bild av någon punkt i p. TP1 skär inte planet p', varför P1 saknar bildpunkt i p', och TP'2 skär inte planet p; P'2 är därför ingen bild. Genom tillägg av s.k. oändlighetspunkter elimineras dessa undantag (se projektiv geometri, i vilken centralprojektion spelar stor roll).
Vid centralprojektion avbildas i allmänhet rät linje på rät linje (tillfogar man till varje plan den s.k. oändlighetslinjen gäller detta generellt). Vidare är dubbelförhållandet invariant (oförändrat) vid centralprojektion (dock i allmänhet ej delningsförhållandet). Se även Parallellprojektion.

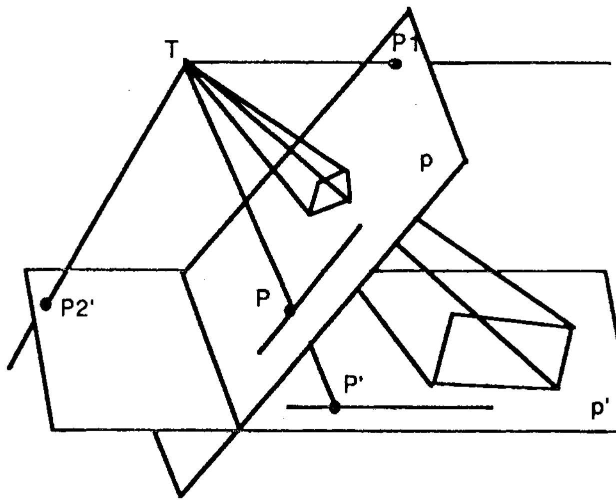


Fig 11, Centralprojektion

Delningsförhållande

Låt A, B och C vara punkter på en rät linje. Talet AB/BC, som är kvoten mellan längderna av sträckorna AB och BC, om vektorerna AB och BC är lika riktade, och = kvoten mellan sträckorna AB och BC, försedd med minustecken, om vektorerna är motsatt riktade, kallas ett delningsförhållande. Vid parallellprojektion är delningsförhållandet oförändrat, däremot i allmänhet ej vid centralprojektion.

Dualitetsprincipen

I den projektiva geometrin, fundamental princip, enl. vilken varje sats har en dual motsvarighet, som (i plan projektiv geometri) erhålls genom att byta ut "punkt" mot "linje", "sammanbindningslinjen mellan två punkter" mot "skärningspunkten mellan två linjer", "ligger på" mot "går genom" och omvänt. Exempelvis är den duala motsvarigheten till Désargues triangelsats omvändningen till denna sats. Brianchos sats är dual till Pascals sats.
Det algebraiska underlaget för dualitetsprincipen är den strukturella likheten mellan punktkoordinater och linjekoordinater.

Dubbelförhållande

Låt A, B, C, D vara fyra punkter på en rät linje. Talet

$$(ABCD)= \frac{AC}{BC} : \frac{BC}{BD}$$

kallas dubbelförhållandet av de fyra punkterna (jfr delningsförhållande). Om (ABCD)=-1, dvs.

om $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$,

så sägs C och D dela sträckan AB harmoniskt. D kallas den fjärde harmoniska punkten till A, B, C. Om (ABCD) |=| -1, så är även (CDAB) |=| -1, dvs. A och B delar också sträckan CD harmoniskt. Dubbelförhållandet är en s.k. invariant i den projektiva geometrin enligt följande sats, kallad Pappos sats: Dubbelförhållandet av fyra punkter på en rät linje är oförändrat vid projektion. Om l och l' är två linjer och T är en punkt, som inte ligger på någon av dem, så är punkterna A, B, C, D på l och A', B', C', D' på l' varandras motsvarigheter vid en centralprojektion. Enligt Pappos sats gäller att (ABCD) = (A'B'C'D').

Homogent koordinatsystem

Samband mellan punkterna i ett plan med taltrippler (x1, x2, x3) med x3≠0, varvid mot varje punkt svarar oändligt många prportionella taltrippler. Ex.vis är tripplerna (1, 2, 2) och (3, 6, 6) koordinater för samma punkt. Om koordinaterna för en punkt i ett vanligt koordinatsystem är (X1, X2) gäller följande samband:

$X1 = \frac{x1}{x3}$; $X2 = \frac{x2}{x3}$, varvid x3≠0,

Ekvationen för en rät linje i planet är i vanliga, (inhomogena) kordinater aX1 + aX2 + a3 = 0, där a1 och a2 ej båda är noll, och i homogena koordinater a1x1 + a2x2 + a3x3 = 0, en homogen ekvation.

Genom införandet av homogena koordinater i planet kan oändlighetspunkterna och oändlighetslinjerna beskrivas algebraiskt. En oändlighetspunkt är en till en rät linje associerad oegentlig punkt. Parallella linjer har samma oändlighetspunkt. Oändlighetslinjen är den tänkta linje, som sammanbinder oändlighetspunkterna. Ex.vis är (1, 2, 0) eller (1, 2t, 0) för varje reellt t, koordinaterna för den oändlighetspunkt som svarar mot de sinsemellan parallella linjer, som har riktningstalen 1 och 2. Koordinaterna för varje oändlighetspunkt satisfierar ekvationen x3 |=| 0, som därför är ekvationen för oändlighetslinjen.

Mängden av de egentliga punkterna i ett plan kallas ett affint plan. Det plan man får genom tillägg av oändlighetspunkterna kallas det projektiva planet. I det projektiva planet gäller följande sats oinskränkt: "Två räta linjer i samma plan har alltid en punkt gemensam". Om linjerna är parallella, är den gemensamma punkten den oändlighetspunkt, som är tillordnand den riktning, som bestäms av de båda parallella linjerna. Homogena koordinater begagnas i den projektiva geometrin. Se även linjekoordinater.

Linjekoordinater

De tre talen x1, x2 och x3, ej alla=0, eller talen tx1, tx2, tx3 för varje t|≠|0, kan uppfattas som koordinaterna för en punkt i ett plan i ett homogent koordinatsystem. I detta system är koordinaterna för en rät linje a1x1 + a2x2 + a3x3 = 0, eller (ta1)x1 + (ta2)x2 + (ta3)x3 = 0 för varje t|≠|0, där a1, a2, a3 är ej alla = 0.Mot varje linje i planet (inklusive den s.k. oändlighetslinjen) svarar därmed oändligt många proportionella taltripler (ta1,ta2,ta3), där t|≠|0 samt a1, a2, a3 ej alla = 0. En sådan trippel kallas linjekoordinaterna för ifrågavarande linje. Ex.vis är trippeln (1, 2, 0) linjekoordinaterna för den linje genom origo som har riktningstalen 2 och -1; trippeln (0, 0, 1) är koordinaterna för oändlighetslinjen. Analogin mellan punktkoordinater och linjekoordinater är det algebraiska fundamentet för den s.k. dualitetsprincipen, som är av stor betydelse i den projektiva geometrin.

Oändlighetspunkt

I projektiv geometri, en till varje rät linje associerad oegentlig punkt. Parallella linjer har gemensam oändlighetspunkt. Genom införandet av oändlighetspunkter i planet blir ex.vis följande utsaga generellt sann i den projektiva geometrin: "Två räta linjer, som ligger i samma plan, har en punkt gemensam." Det vanliga (affina) planet, utökat med oändlighetspunkterna kallas det projektiva planet. För en algebraisk beskrivning av oändlighetspunkterna och oändlighetslinjen, se homogent koordinatsystem. Oändlighetspunkterna introducerades av Désargues på 1600-talet.

Parallellprojektion

Låt p och p' vara två plan i rummet, samt l en linje som inte är parallell med p eller p'. En godtycklig linje parallell med l skär p i P och p' i P' och definierar härigenom en avbildning av p på p', som kallas parallellprojektion i rummet (man talar också om parallellprojektion i planet; då är p och p' linjer i detta plan) l definierar projektionsriktningen. Parallellprojektionen har följande egenskaper:

(1) En rät linje projiceras på en rät linje;
(2) Parallella linjer projiceras på parallella linjer;
(3) Delningsförhållandet är oförändrat;
(4) Förhållandet mellan en figurs yta och ytan av bilden är konstant.

Parallellprojektion är en affin avbildning. Om linjen l, som bestämmer projektionsriktningen, är vinkelrät (ortogonal) mot planet p', talar man om ortogonalprojektion. I detta fall är det konstanta förhållandet i (4) lika med inverterade värdet av cosinus för vinkeln mellan planen p och p'. (...) Parallellprojektion kan betraktas som en centralprojektion vars projektionscentrum är den oändlighetspunkt som hör till linjen l.

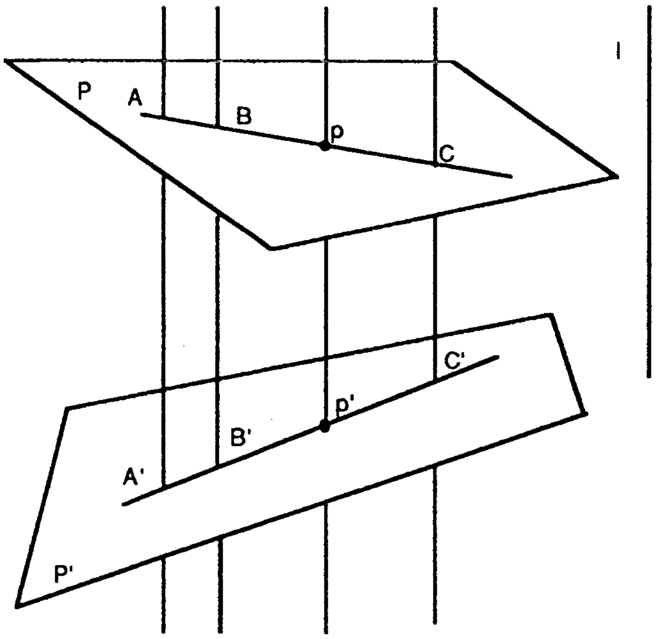


Fig 12, Parallellprojektion

Projektiv avbildning

En projektiv avbildning av ett plan på ett annat (av ett plan på sig självt) är en omvändbar avbildning, sådan att
1: punkterna på en rät linje övergår i en rät linje, samt
2: dubbelföhållandet är invariant (oförändrat).
En centralprojektion är en speciell typ av projektiv avbildning, dock kan varje projektiv avbildning av ett plan på ett annat betraktas som sammansättningar av centralprojektioner om planen placeras i rymden på ett lämpligt sätt i förhållande till varandra. En sådan avbildning är entydigt bestämd, om bilderna anges till fyra punkter, av vilka ej tre ligger i rät linje.
En projektiv avbildning av en linje på en linje (av en linje på sig själv) är en omvändbar avbildning, som är sådan att dubbelförhållandet är invariant. Varje sådan avbildning kan ersättas med två centralprojektioner (i planet), utan att linjernas läge behöver ändras. Projektiva avbildningar kan studeras i den projektiva geometrin.

Projektiv geometri

Den geometri, som är associerad till gruppen av projektiva avbildningar. I denna geometri studeras de egenskaper hos plana figurer, som bevaras under centralprojektion. Den projektiva geometrin i planet studeras lämpligen i det projektiva planet, vilket är det vanliga (affina) planet, utökat med de s.k. oändlighetspunkterna, oegentliga punkter, var och en svarande mot en klass av parallella linjer i planet. Sammanfattningen av oändlighetspunkterna kallas oändlighetslinjen. införandet av dessa oegentliga geometriska objekt medför, att åtskilliga saker, som eljest skulle förete inskränkningar, blir allmängiltiga, och bidrar därmed till den projektiva geometrins elegans och stora överskådlighet. Ex.vis avbildas punkten P1 i den centralprojektion, som visas i figuren under artikeln centralprojektion, i en oändlighetspunkt i planet p'; utan oändlighetspunkter hade man alltså varit tvungen att utesluta P1 (jämte ytterligare punkter i planet p) från centralprojektionens definitionsmängd. Ett exempel på en utsaga, som är sann i den projektiva geometrin (däremot inte i den affina geometrin) är följande: "Två räta linjer, som ligger i samma plan, har alltid en punkt gemensam" (en oändlighetspunkt om linjerna är parallella).
Egenskaper hos plana figurer som är invarianta (oförändrade) vid centralprojektion är t.ex. följande: Egenskapen hos en kurva att vara rät linje (rätlinjighet), incidens, dvs. den omständigheten att en punkt ligger på en linje eller en linje går genom en punkt och dubbelförhållandet mellan fyra punkter på en rät linje. Kägelsnitt avbildas på kägelsnitt, dock ej nödvändigtvis av samma typ. En ellips kan således avbildas på t.ex. en hyperbel och en cirkel på en parabel, etc. Däremot är t.ex. längder av sträckor, mått av vinklar och delningsförhållanden ej invarianta.

Satser som Désargues sats, Pappos sats (som i själva verket är ett bevis för att dubbbelförhållandet är invariant under centralprojektion), Pascals sats och Brianchons sats är exempel på projektiva satser; de behandlar egenskaper, som är projektivt invarianta.
En betydelsefull regel inom den projektiva geometrin är den som uttrycks av dualitetsprincipen, vilken innebär att varje projektiv sats har en dual motsvarighet, som erhålls genom att kasta om orden "punkt" och "linje". Sålunda är Brianchons sats den duala motsvarigheten till Pascals sats; den duala motsvarigheten till Désargues sats är dennas omvändning.
Analytisk projektiv geometri är studiet av projektiv geometri med algebraiska metoder, baserade på ett homogent koordinatsystem.
Den projektiva geometrin introducerades av Désargues på 1600-talet. emellertid blev dennes forskningsresultat relativt sett obeaktade fram till början av 1800-talet, då Poncelet publicerad den första systematiska framställningen av den projektiva geometrin 1821. Under mitten och slutet av 1800-talet "fulländades" det projektiva synsättet på geometri bl.a. av sådana mästare som Plücker, Möbius, Von Staudt, Chasles, Klein, Lie och Cayley.

Projektivt ambivalent
Kan man bli när MacApp behagar dyka stup i kvarten under utvecklingen av MacDrawboard.

Projektivt ekvivalent
Två figurer kallas projektivt ekvivalenta, om det existerar en projektiv avbildning, som överför den ena figuren i den andra. Två kägelsnitt vilka som helst är exempelvis projektivt ekvivalenta. Detta förhållande uttrycks ibland så, att i den projektiva geometrin existerar blott ett kägelsnitt (jämför ekvivalensrelation).

Projektivt plan
Ett vanligt (affint) plan, utökat med de s.k. oändlighetspunkterna. Sammanfattningen av dessa är oändlighetslinjen. Projektiva plan begagnas i den projektiva geometrin. I ett projektivt plan kan införas ett homogent koordinatsystem.

Punktkoordinater
Koordinaterna för en punkt i ett homogent koordinatsystem.

Appendix 3
Kortfattad beskrivning av menyerna

****

About MacDrawboard	- visar lite information om MacDrawboard.

File

New	- Skapar ett nytt dokument.
Open	- Öppnar ett befintligt dokument som sparats på skivminnet.
Close	- Stänger det aktuella dokumentet.
Save	- Sparar det aktuella dokumentet.
Save as	- Sparar det aktuella dokumentet under annat namn.
Save a copy	- Skapar en kopia av det aktuella dokumentet.
Revert	- Återgår till senast sparade version av det aktuella dokumentet.
Quit	- Avslutar MacDrawboard.

Edit

Undo	- Ångrar senast givna kommando (OBS! vissa kommandon går ej att ångra!)
Create free point	- Skapar en fri punkt. Man får upp en kooordinatdialogruta där man kan döpa punkten, samt ge dess koordinater.
Create free line	- Skapar en fri linje. Man får upp en kooordinatdialogruta där man kan döpa linjen, samt ge dess koordinater.
Create point on 1 line	- Öppnar en Dubbelförhållandedialog (se nedan) som skapar en punkt som är bunden till den linje man markerat.
Create line on 1 point	- Öppnar en Dubbelförhållandedialog (se nedan) som skapar en linje som är bunden till den punkt man markerat.
Create point on 2 lines	- Skapar en punkt som är bunden till de bägge linjer man markerat. Det enda man kan ändra i en punkt med två föräldrar, är dess namn.
Create line on 2 points	- Skapar en linje som är bundet till de bägge punkter man markerat. Det enda man kan ändra i en linje med två föräldrar, är dess namn.
Delete	- Tar bort det markerade objektet, samt dess eventuella barn.

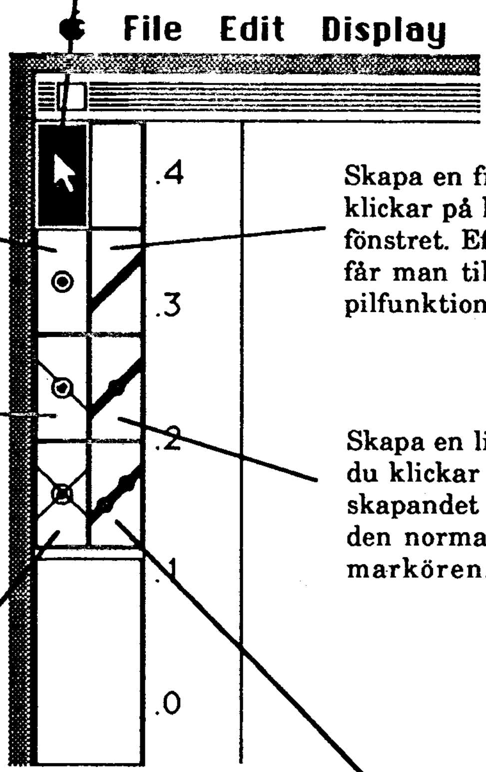
Display

Information	- Visar (och ger möjlighet till editering i) ovanstående numeriska dialoger.
Parents	- Markerar ett objekts ev. föräldrar. (en generation bakåt)
Children	- Markerar ett objekts ev. barn (närmaste efterföljande generation)
Base	- Visar basen för det aktuella fönstret.
Internal Base	- Används ej i MacDrawboard i dag, reserverat för framtida bruk.
Transform from this window	-Utför en transformering, där de valda objekten bildar numerisk stomme för basen i det transformerade fönstret.
Transform in new window	- Utför en transformering, där man genom att klicka 4 punkter i det nya fönstret väljer bas i det transformerade fönstret
Scroll Numeric	- Numerisk förflyttning av fönstercentrering
Zoom In	- Förstorar bilden i det aktuella fönstret.
Zoom Out	- Förminskar bilden i det aktuella fönstret
Normal	- Rita alla objekt som de är definierade.
Inverted	- Rita alla objekt som de ser ut efter en dualisering.

Appendix 4
Kort beskrivning av paletten

Pilen används för markera och flytta objekt i det aktuella fönstret

Skapa en fri punkt vid det ställe man klickar på härnäst i det aktuella fönstret. Efter skapandet av punkten får man tillbaka den normala pilfunktionen hos



Skapa en fri linje vid det ställe man klickar på härnäst i det aktuella fönstret. Efter skapandet av linjen får man tillbaka den normala pilfunktionen hos markören.

Skapa en punkt bunden till nästa linje du klickar på med markören. Efter skapandet av punkten får man tillbaka den normala pilfunktionen hos markören.

Skapa en linje bunden till nästa punkt du klickar på med markören. Efter skapandet av linjen får man tillbaka den normala pilfunktionen hos markören.

Skapa en punkt bunden till de två nästa linjer man klickar med markören. Efter skapandet av punkten får man tillbaka den normala pilfunktionen hos markören.

Skapa en linje bunden till de två nästa punkter man klickar med markören. Efter skapandet av linjen får man tillbaka den normala pilfunktionen hos markören.