



KTH



CID
Centre for
User Oriented IT Design

Matematiska grunder för Artificiellt Medvetande

Gästföreläsning på IT-universitetet 22/8-2001 av

Ambjörn Naeve

Computer Vision and Active Perception (CVAP)

Centre for user-oriented IT Design (CID)

Numerisk Analys och Datalogi (NADA)

KTH

web-sites: www.nada.kth.se/cvap

cid.nada.kth.se/il

kmr.nada.kth.se

Gymnasiet:

Mängdlära



IT/KTH:

Kategoriteori

plato.stanford.edu/entries/category-theory/
www.unico.it/~walters/catcom/catcomproj.html



Tillämpn:

Artificellt
Medvetande

lea.hamradio.si/~s51em/artifico.html

Geometri



Geometrisk Algebra

modelingnts.la.asu.edu/GC_R&D.html



Scenanalys
Rörelsealgoritmer

www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/

Artificiellt medvetna robotar

Def: En *Kategori* består av en familj av *objekt* (A, B, \dots)
med *pilar* (f, g, h, \dots) mellan vissa av objekten, så att:

(i): pilar som ligger i följd kan *sammansättas*, dvs

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ \quad \quad \quad \curvearrowright \\ \quad \quad \quad g \circ f \end{array}$$

(ii): sammansättningen är *associativ*, dvs

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

(iii): för varje objekt A finns en *enhetspil* $A \xrightarrow{1_A} A$

så att $f \circ 1_A = f$ och $1_A \circ k = k$

för alla pilar f, k som börjar resp. slutar i A .

Ex 1: Kategorin av mängder (*Sets*):

Objekt = *mängder*.

Pilar = *funktioner* mellan dessa.

Ex 2: Kategorin av logiska påståenden (*Logic*):

Objekt = *logiska påståenden* (P, Q, \dots).

Pilar = *implikationer* mellan dessa ($P \Rightarrow Q$).

Ex 3: Kategorin av alla beslutskomplex

hos ett självorganiserande system (*Cons*):

Objekt = *delsystem med beroenden* sinsemellan.

Pilar = *avbildningar som respekterar dessa*.

Def: Ett objekt A i en kategori kallas *initialt* om det för varje objekt B finns *exakt en* pil $A \rightarrow B$

Def: Ett objekt A i en kategori kallas *finalt* om det för varje objekt B finns *exakt en* pil $B \rightarrow A$

Ex: I *Sets* är \emptyset *initialt* objekt och 1 *finalt* objekt.

Ex: I *Logic* är varje *obetingat falskt* påstående *initialt* och varje *obetingat sant* påstående *finalt*.

Notera: Definitionerna av initialt och finalt objekt är *duala* i den bemärkelsen att man får den ena ur den andra genom att *byta riktning på pilarna*.

Def: Med *summan* av objekten A och B i en kategori

menas ett *diagram*

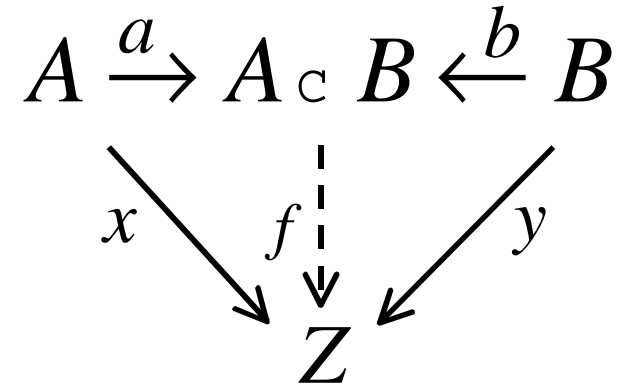
med följande egenskap :

För varje diagram av typen

finns en *unik* pil f

sådan att $f \circ a = x$ och $f \circ b = y$

dvs sådan att *diagrammet kommuterar*.



Ex: I *Sets* är *summan* $A \text{ c } B$ en mängd som består av elementen i A och elementen i B (*disjunkta unionen*)

$$A \text{ c } B = A \dot{\cup} B$$

Ex: I *Logic* är *summan* av två påståenden P och Q lika med deras *disjunktion*, dvs påståendet P eller Q

$$P \text{ c } Q = P \vee Q$$

Dualt gör vi följande

Def: Med *produkten* av objekten A och B i en kategori

menas ett *diagram*

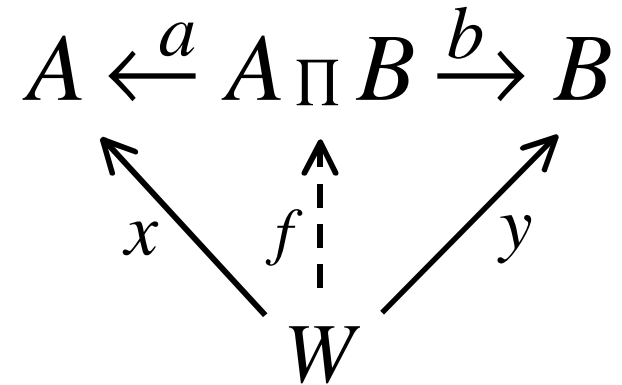
med följande egenskap:

För varje diagram av typen

finns en *unik* pil f

sådan att $a \circ f = x$ och $b \circ f = y$

dvs sådan att *diagrammet kommuterar*.



Ex: I *Sets* är produkten $A \sqcap B$ mängden av par av element i A och element i B (*kartesiska produkten*)

$$A \sqcap B = A \times B$$

Ex: I *Logic* är produkten av två påståenden P och Q lika med deras *konjunktion*, dvs påståendet P och Q

$$P \sqcap Q = P \wedge Q$$

Summa och produkt definieras analogt för godtyckliga familjer F av objekt A_k

$$F = \{A_k : k \in I\} .$$

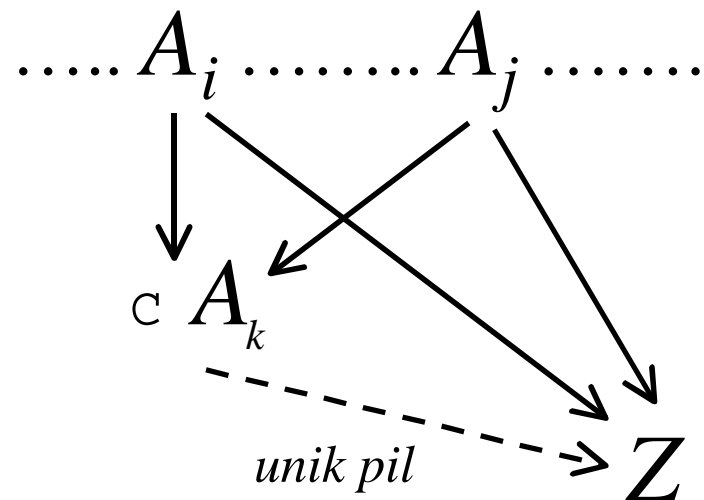
Man skriver $\coprod A_k = \coprod_{k \in I} A_k$ och $\prod A_k = \prod_{k \in I} A_k$.

Informellt beteckningsätt:

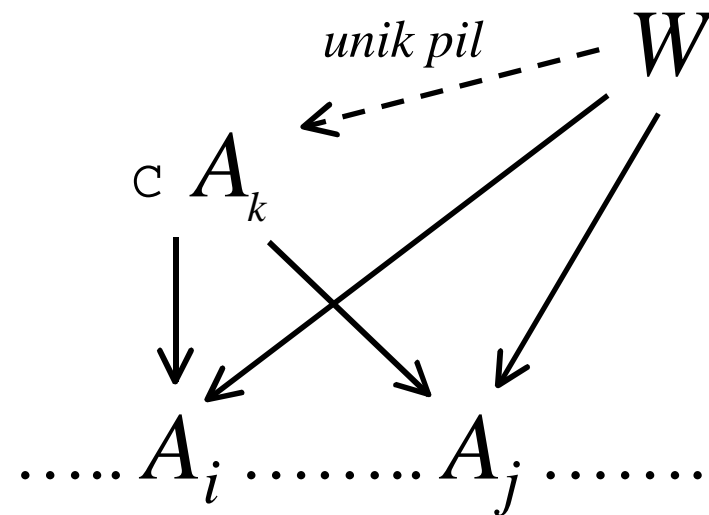
Man säger att ett objekt Z *ligger under* familjen F , om det går *exakt en pil* $A_k \rightarrow Z$ för varje $A_k \in F$.

Dualt säger man att ett objekt W *sitter på* familjen F om det går *exakt en pil* $W \rightarrow A_k$ för varje $A_k \in F$.

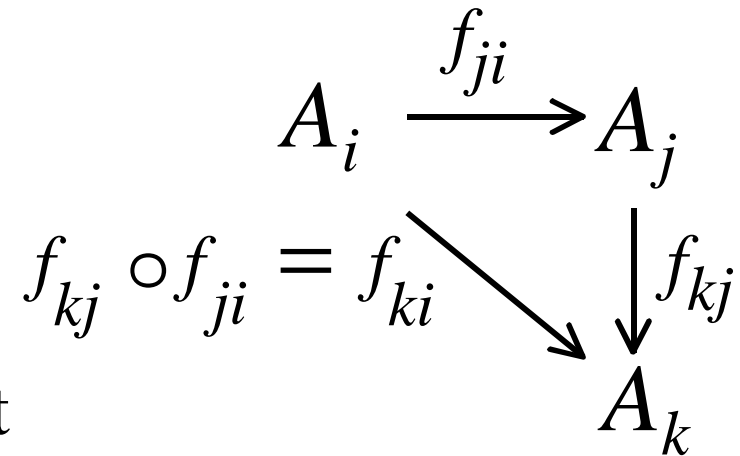
Summan
av en familj objekt
ligger initialt under familjen
ty, för varje objekt Z
som ligger under familjen,
finns en *unik pil*
från summan till Z
så att diagrammet *kommuterar*.



Produkten
av en familj objekt
sitter finalt på familjen
ty, för varje objekt W
som sitter på familjen,
finns en *unik pil*
från W till produkten
så att diagrammet *kommuterar*.



Antag nu
att det även finns pilar
mellan objekten i vår familj
(högst en pil mellan varje
par av objekt) på ett sådant sätt att
varje triangel kommuterar.

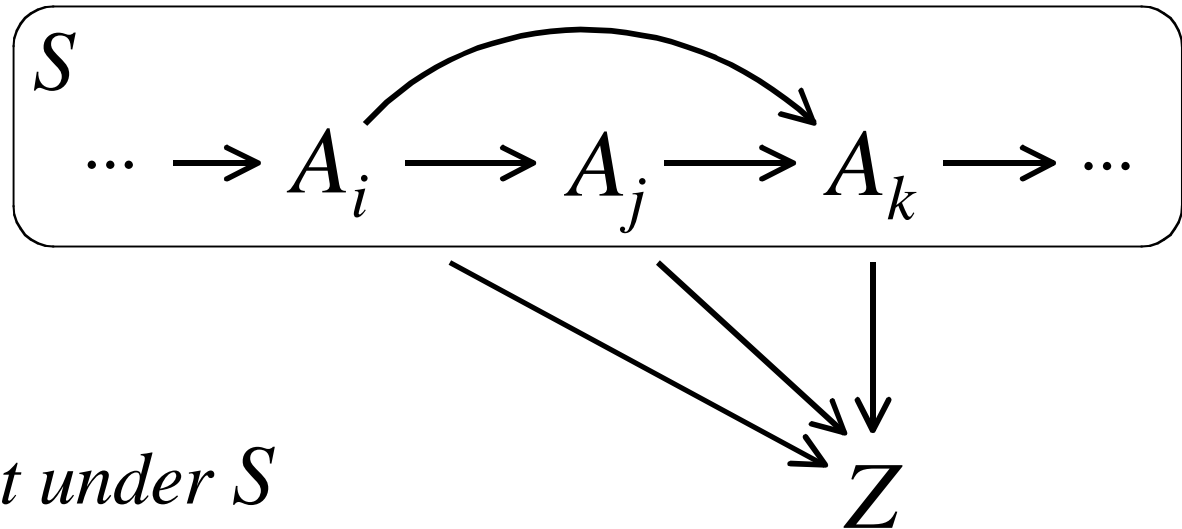


Def: En sådan familj av objekt kallas då ett *system*.

Notera: Om man går olika (pil)vägar
mellan två objekt i ett system S
så blir den resulterande pilen alltid densamma,
oberoende av vilken väg man väljer.

Def: Man säger att systemet S har en *intern koherens*,
dvs dess olika objekt (= delar)
är *koherenta* med varandra.

Givet ett system S i en kategori.



Def: Ett objekt Z

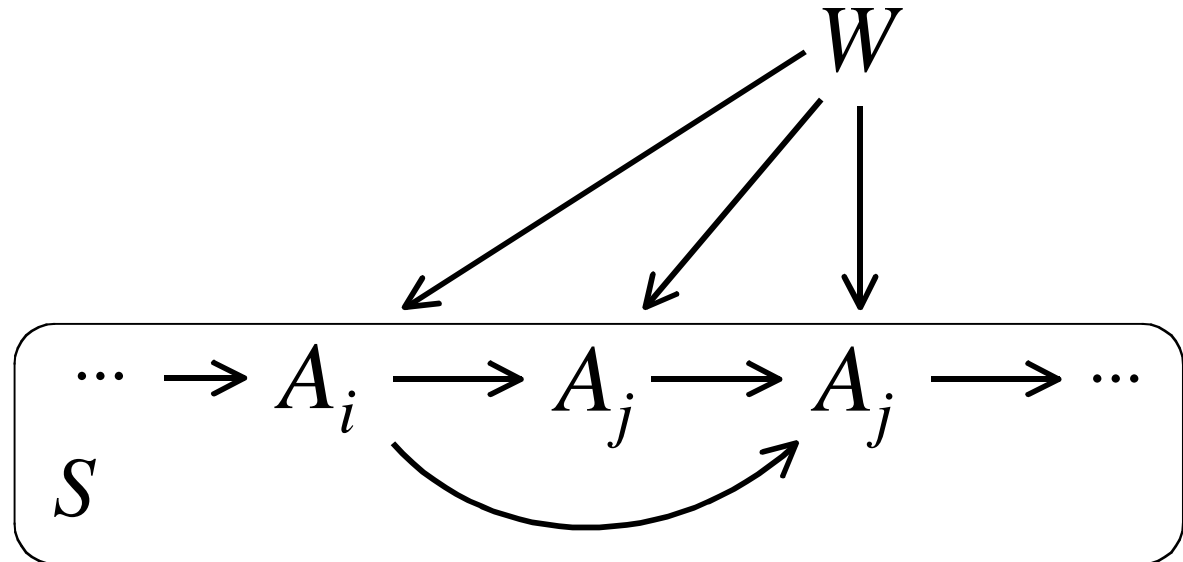
ligger koherent under S

om Z ligger under S

och pilarna från S till Z

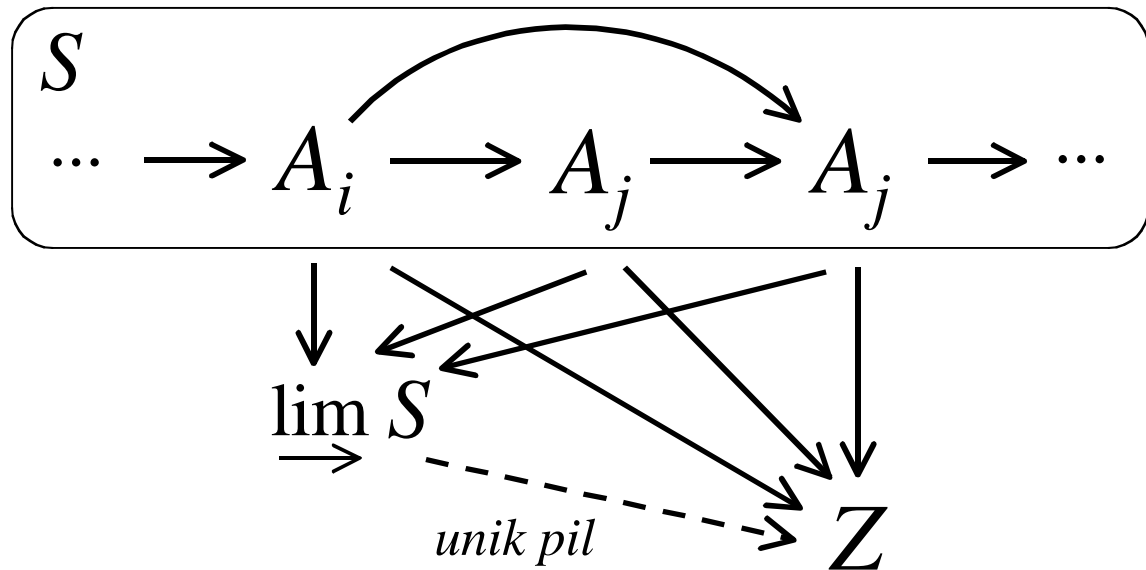
respekterar S interna koherens,

dvs diagrammet kommuterar.

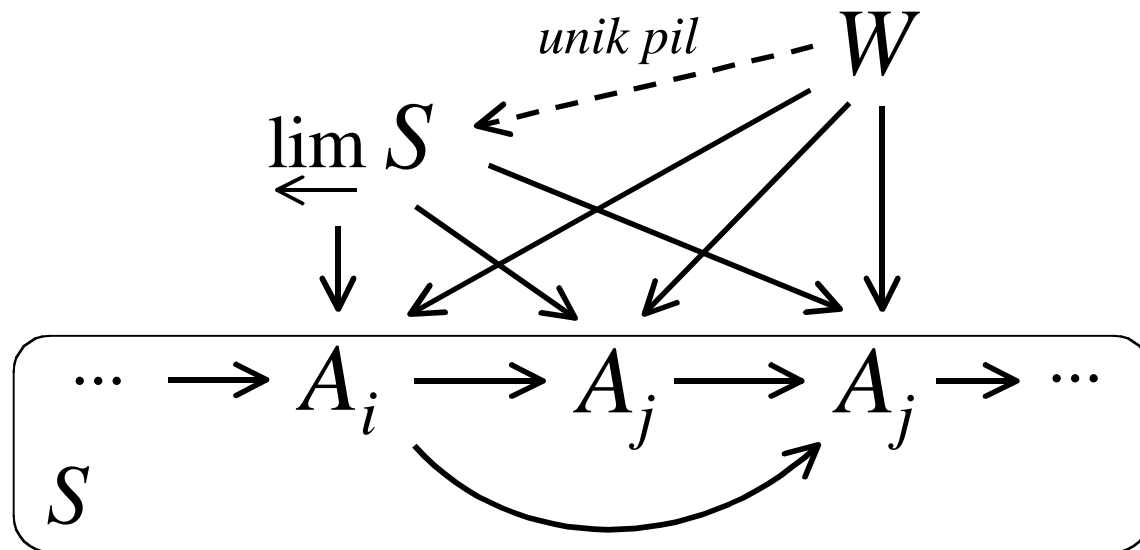


Def: Ett objekt W
sitter koherent på S
 om W sitter på S
 och pilarna från W till S
respekterar S interna koherens,
 dvs diagrammet kommuterar.

Def: $\varinjlim S$ (*direkta limes* av S) är det objekt som ligger initialt koherent under S ,
dvs $\varinjlim S$ ligger koherent under S ,
och för varje objekt Z som också gör det,
finns en unik pil $\varinjlim S \dashrightarrow Z$
så att diagrammet kommuterar.



Def: $\varprojlim S$ (*inversa limes* av S) är det objekt som *sitter finalt koherent på S* ,
dvs $\varprojlim S$ sitter koherent på S ,
och för varje objekt W som också gör det,
finns en unik pil $W \dashrightarrow \varprojlim S$
så att diagrammet kommuterar.



Notera: Om systemet S saknar pilar
(dvs saknar växelverkan mellan sina olika delar),
så övergår direkta och inversa limes
i summa respektive produkt.

$$\lim_{\rightarrow} S = \text{c } A_k$$

$$\lim_{\leftarrow} S = \Pi A_k$$

Formell modell för artificiellt medvetande

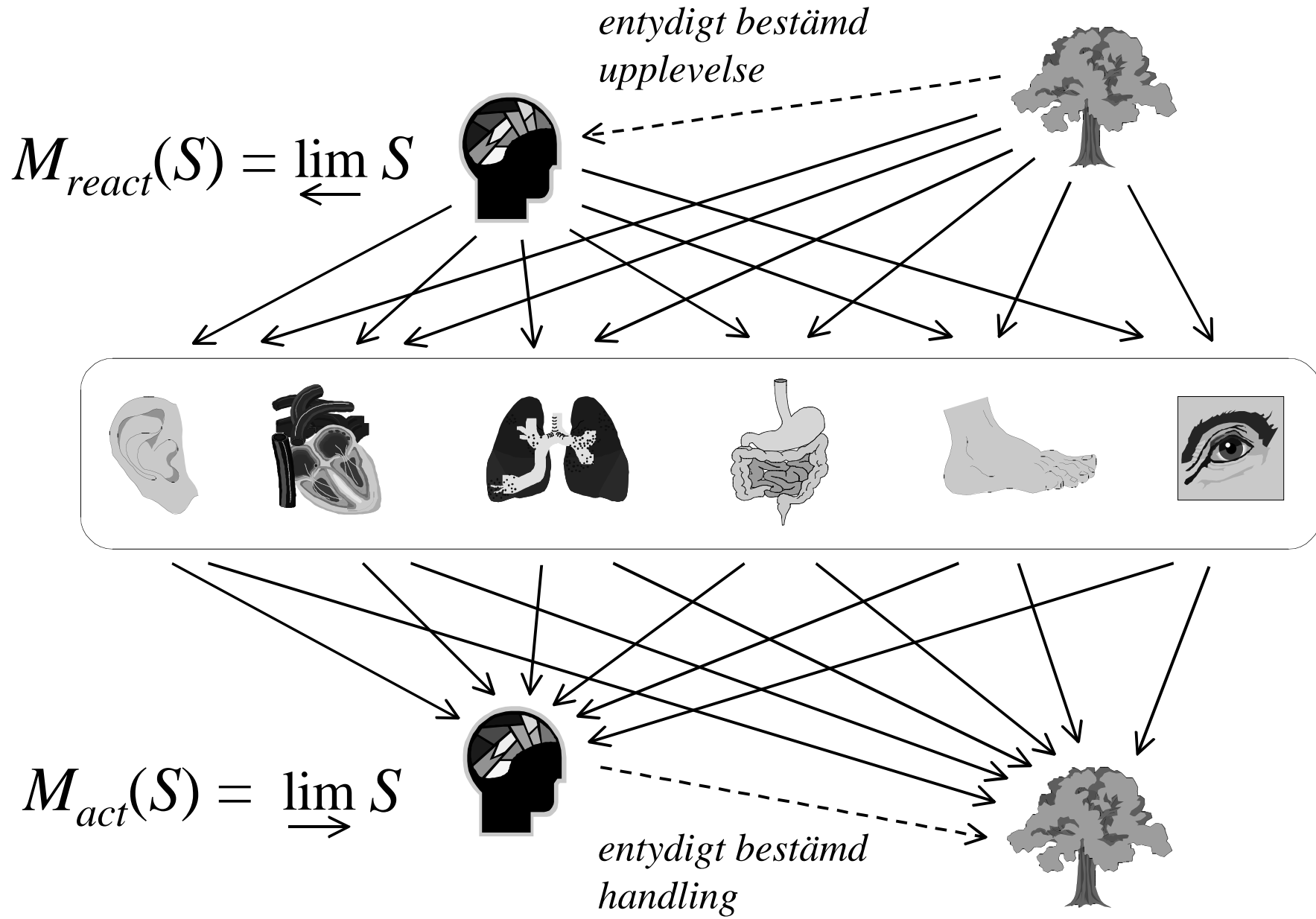
”Siliconsciousness”

Def: Medvetandet hos ett system består av två delar:
aktions-medvetandet (M_{act}) som styr dess *handlingar*, och
perceptions-medvetandet (M_{react}) som styr dess *upplevelser*.

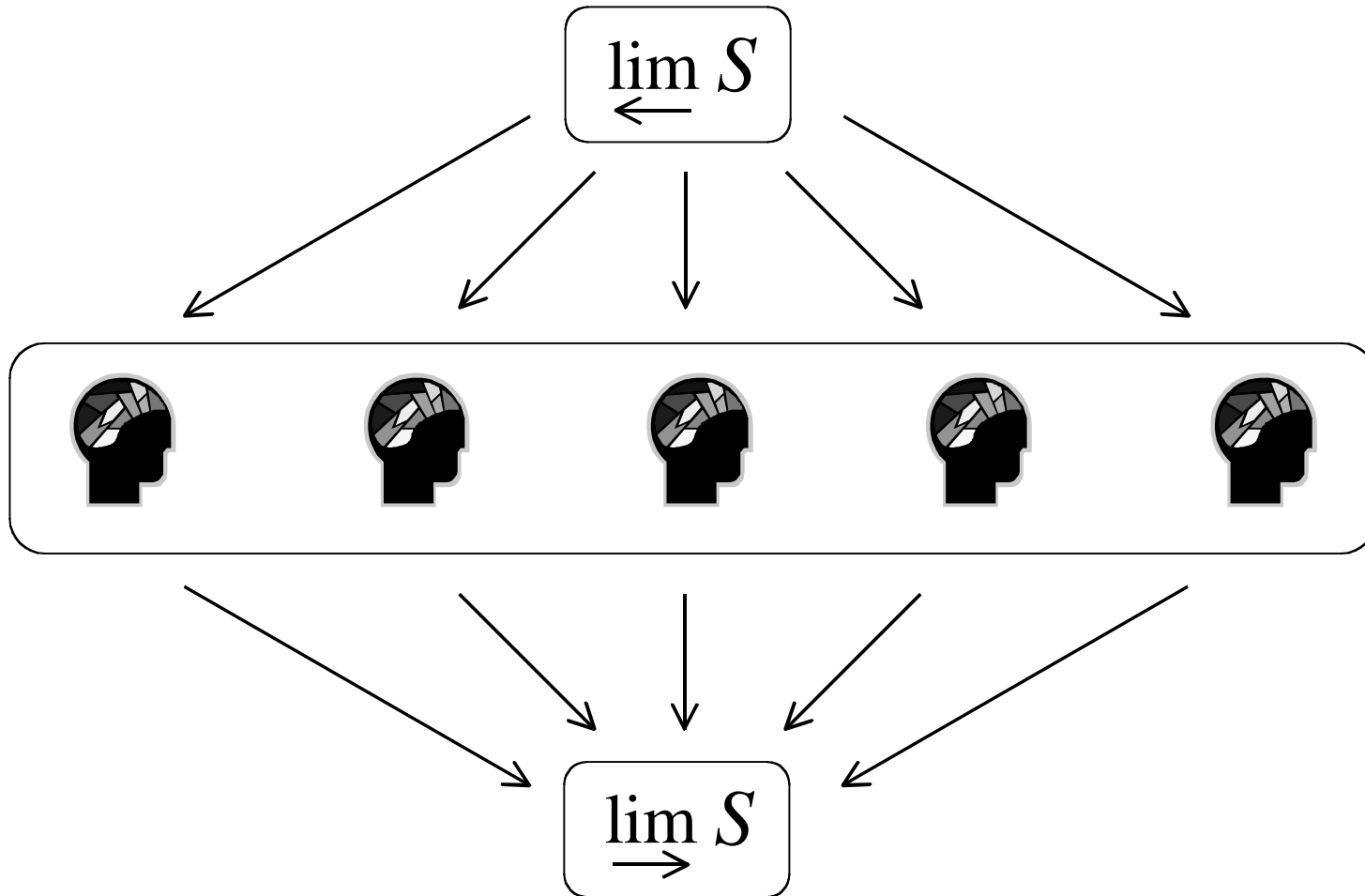
Def: $M_{act}(S) = \lim_{\rightarrow} S$
 $M_{react}(S) = \lim_{\leftarrow} S$

Eilenberg (1956),
Binford (1987),
Zeleznikar (1996)

Referens: <http://lea.hamradio.si/~s51em/artifico.html>



Perceptions-medvetande = *Samsyn* = ”det vi är överens om”



Aktions-medvetande = *Lydnad* = ”det vi rättar oss efter”

GEOMETRISK ALGEBRA

(CLIFFORD ALGEBRA)



H. G. Braun



Yours most truly
W. K. Clifford.

Fundamentala problem med den vanliga algebran (som används i s.k. ”analytisk geometri”)

Geometriska operationer är (i allmänhet) *ordningsberoende*

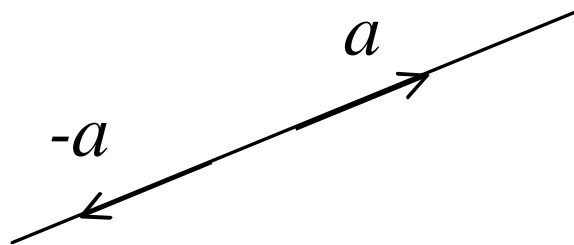
t.ex: $Rot_A(\alpha) \circ Rot_B(\beta) \neq Rot_B(\beta) \circ Rot_A(\alpha)$

medan algebran är *ordningsoberoende* ($xy = yx$).

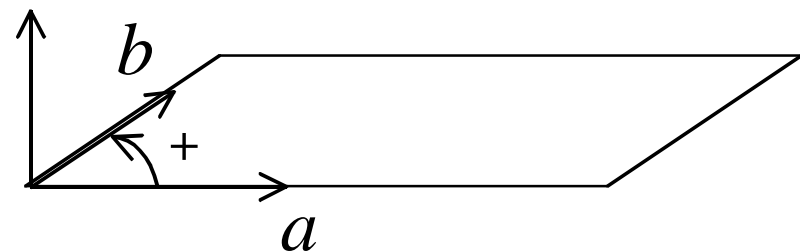
Detta leder bl.a. till att

riktningsbegreppet blir endimensionellt

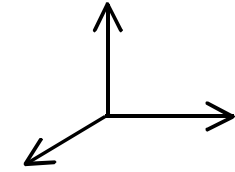
(endast linjer kan tillordnas riktning
på ett koordinatberoende sätt)



koordinat
system



Grundläggande egenskaper hos den geometriska produkten



[a, b, c är vektorer, λ är ett reellt tal, e_1, e_2, e_3 , är ON-bas]

Associativ:

$$a(bc) = (ab)c$$

Vänster-distributiv:

$$a(b+c) = ab + ac$$

Höger-distributiv:

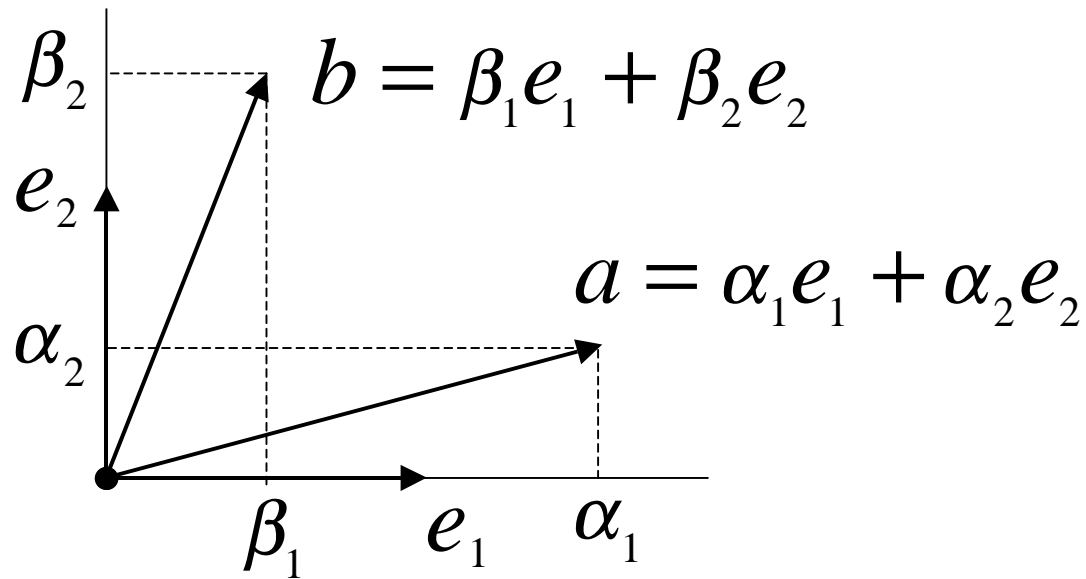
$$(b+c)a = ba + ca$$

Anti-kommutativ på vinkelräta vektorer: $e_i e_k = -e_k e_i, i \neq k$

Kommuterar med reella tal:

$$a\lambda = \lambda a$$

Kvadraten på en vektor är ett reellt tal: $a^2 = |a|^2$



Räkningeregler:

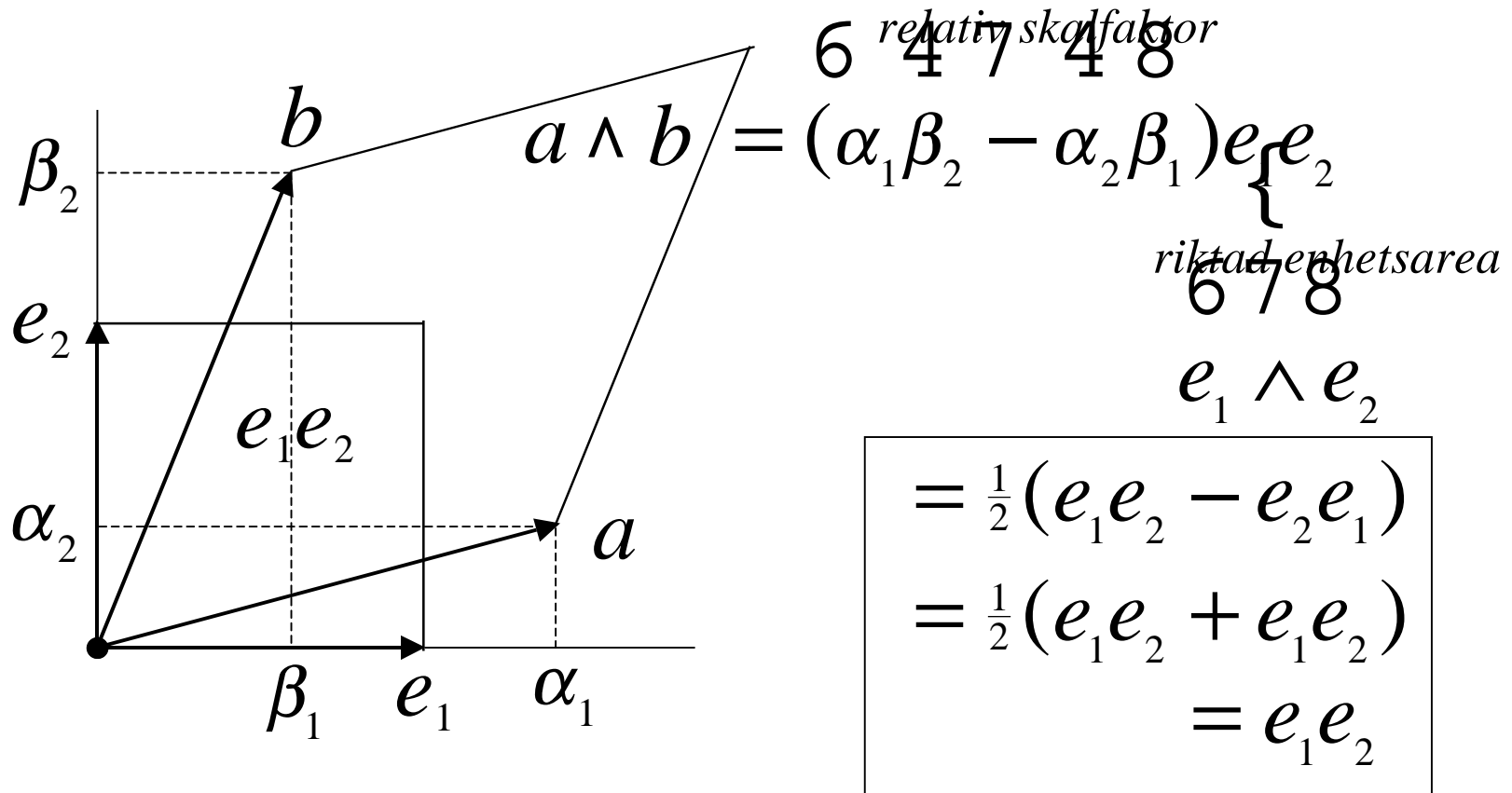
$$e_1^2 = e_2^2 = 1$$

$$e_2 e_1 = -e_1 e_2$$

$$\begin{aligned}
 ab &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \\
 &= \alpha_1 \beta_1 e_1^2 + \alpha_2 \beta_2 e_2^2 + \alpha_1 \beta_2 e_1 e_2 + \alpha_2 \beta_1 e_2 e_1 \\
 &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2
 \end{aligned}$$

Definition:

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= \frac{1}{2}(ab + ba) \\
 a \wedge b &= \frac{1}{2}(ab - ba)
 \end{aligned}$$



Slutsatser:

$$ab = ba \Leftrightarrow ab = a \cdot b \Leftrightarrow a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \parallel b$$

$$ab = -ba \Leftrightarrow ab = a \wedge b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$$

Geometrisk produkt - sammanfattning

Storleken och den *relativa riktningen* hos två vektorer a och b är representerade i deras geometriska produkt ab :

geometrisk produkt: $ab = \overbrace{a \cdot b}^{\text{reellt tal}} + \overbrace{a \wedge b}^{2\text{-blad}}$

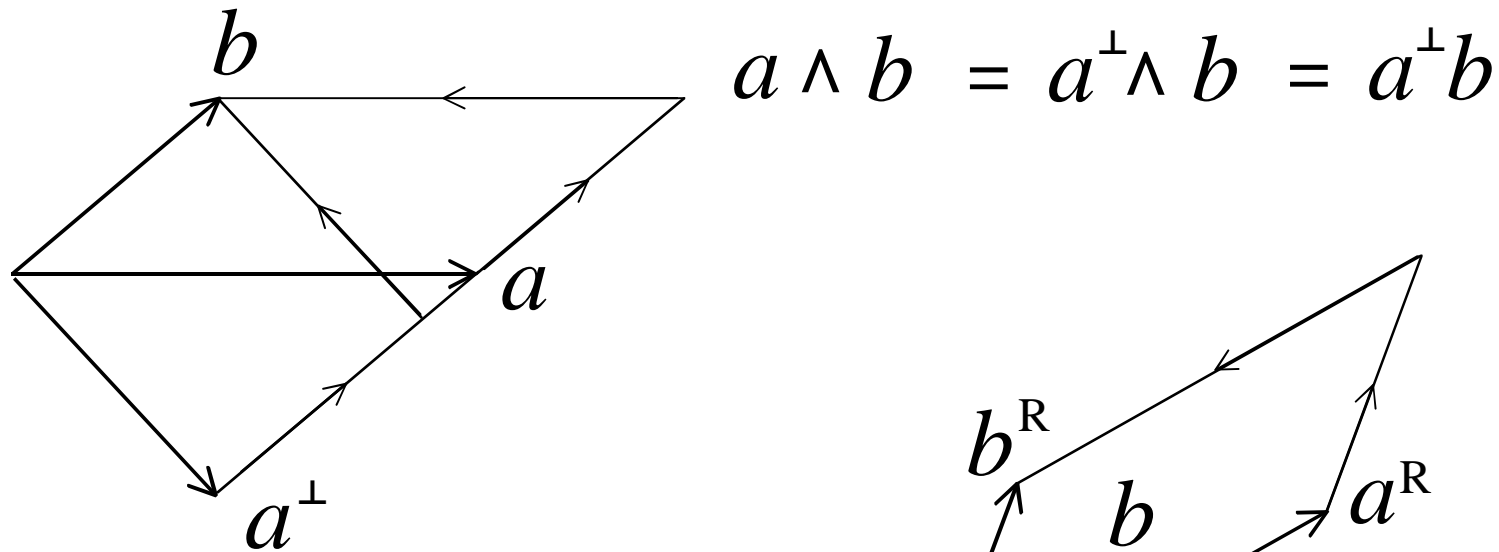
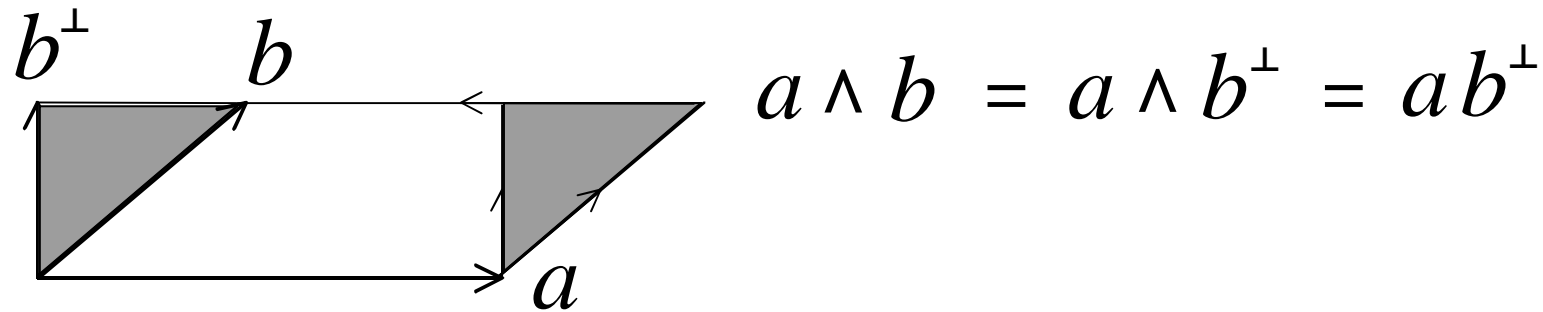
inre produkt: $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) = b \cdot a$

yttre produkt: $a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) = -b \wedge a$

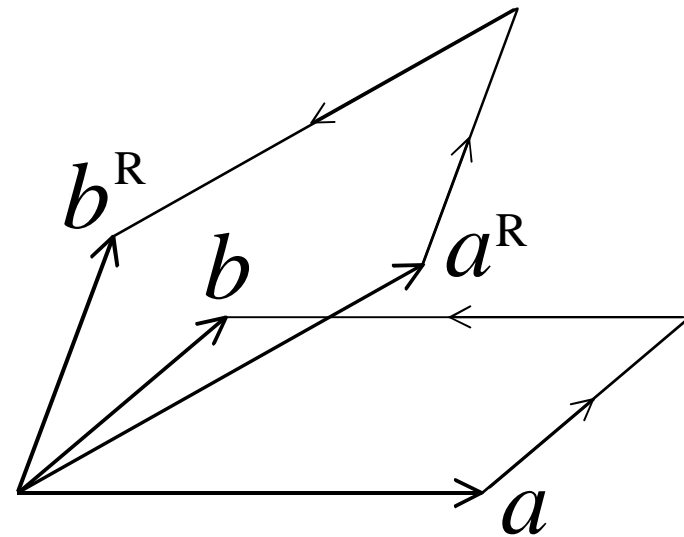
a och b är *parallella* om och endast om: $ab = a \cdot b$

a and b är *vinkelräta* om och endast om: $ab = a \wedge b$

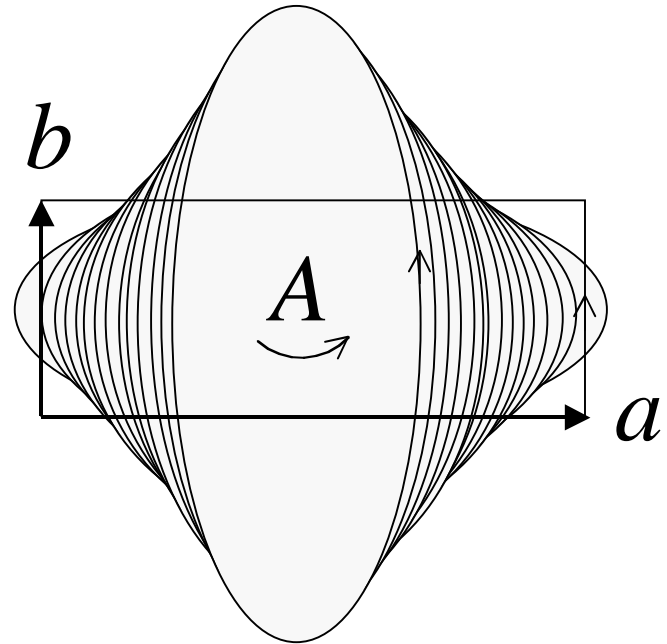
Några ekvivalensoperationer på 2-blad



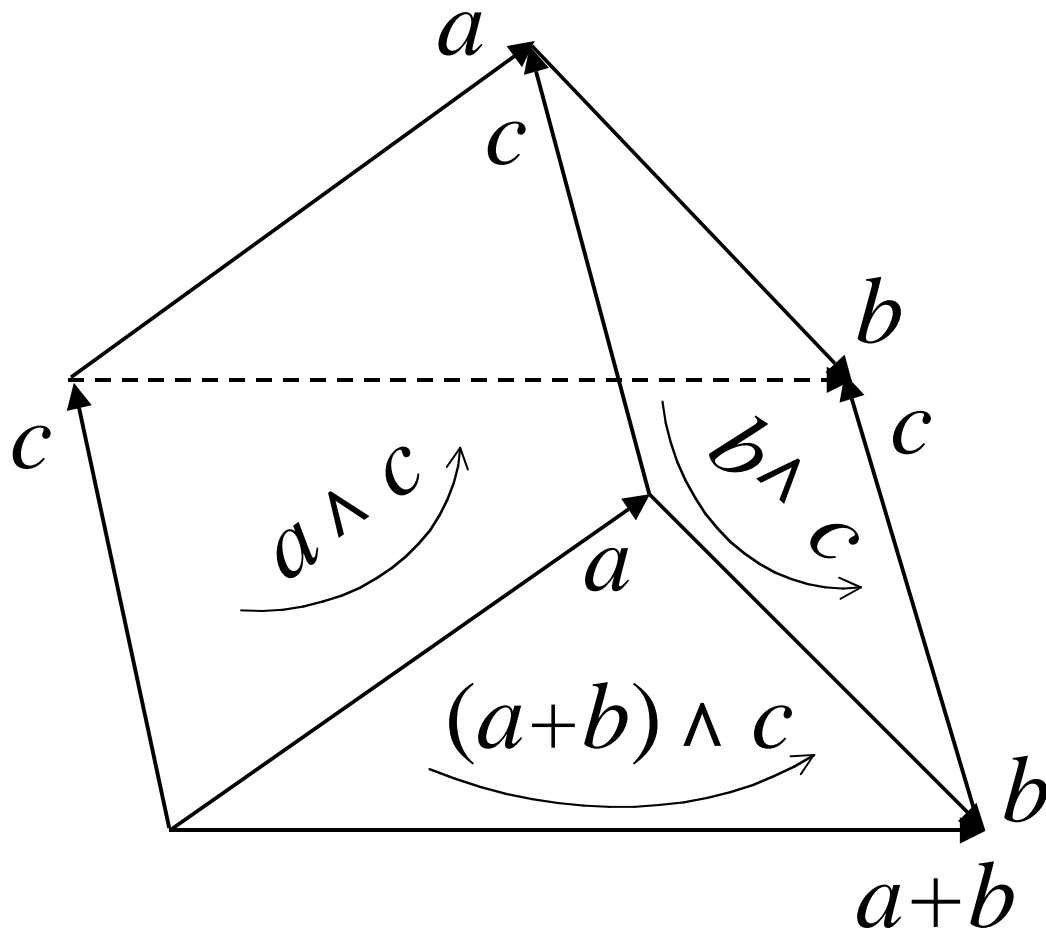
$$a^R \wedge b^R = a \wedge b$$



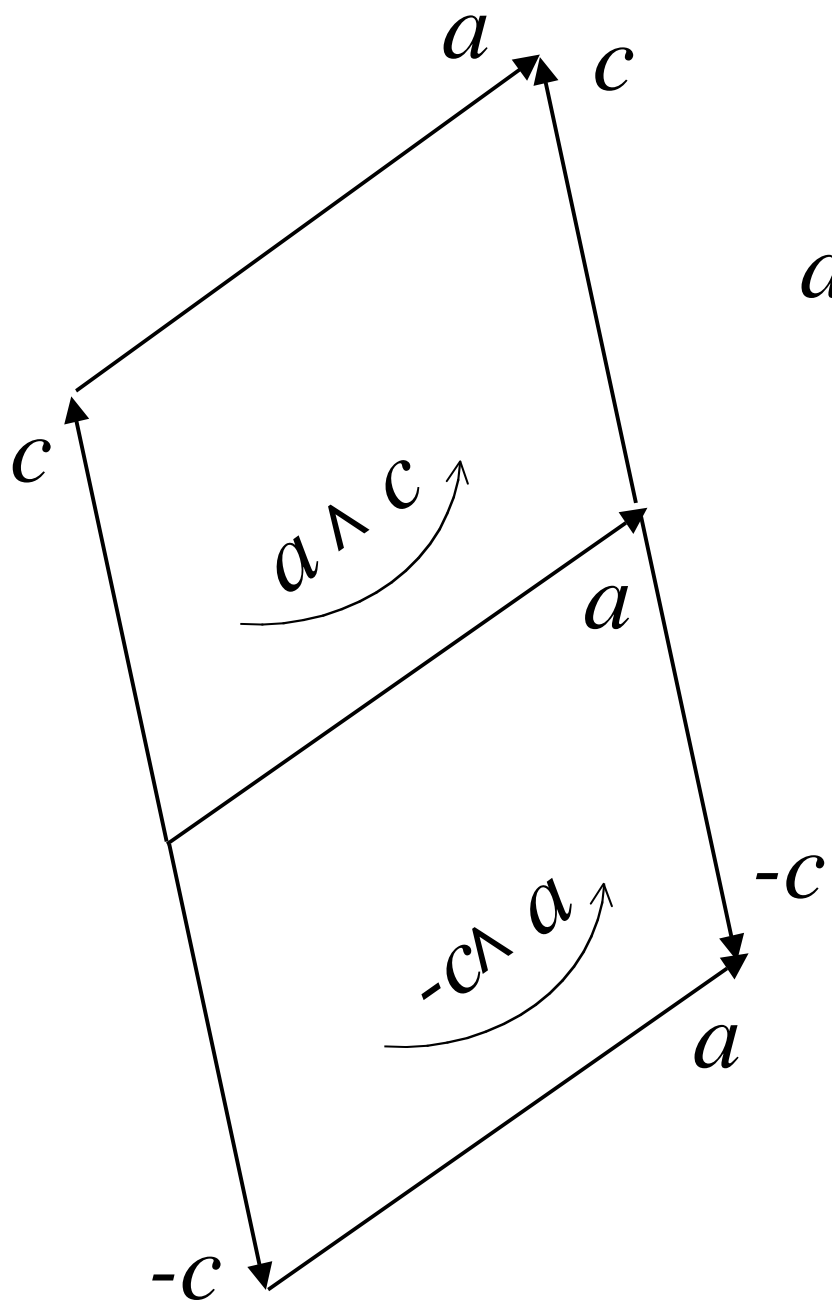
Några ekvivalensoperationer på 2-blad (forts.)



$$A = a \wedge b$$



$$a \wedge c + b \wedge c = (a+b) \wedge c$$



$$a \wedge c = -c \wedge a$$

Blad har en geometrisk tolkning

blad av grad	ekvivalensklasser av riktade	samma riktning och
1	sträckor	längd
2	ytor	area
3	3-dim regioner	volym
⋮	⋮	⋮
k	k -dim regioner	k -volym

Notera att: $(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1 e_2 e_2 e_1 = -1$

Minns att: $ab = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_1 e_2$

Inför: $z = \lambda_1 + \lambda_2 e_1 e_2$, $w = \mu_1 + \mu_2 e_1 e_2$

Har nu: $zw = (\lambda_1 + \lambda_2 e_1 e_2)(\mu_1 + \mu_2 e_1 e_2)$

$$= \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 (e_1 e_2)^2 + \lambda_1 \mu_2 e_1 e_2 + \lambda_2 \mu_1 e_1 e_2$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2)}_{\text{Re}(zw)} + \underbrace{(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)}_{\text{Im}(zw)} e_1 e_2$$

Slutsats: ab kan alltså tolkas som ett komplext tal!

Referenser:

Grassmann, H., *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Leipzig, 1844.

Hestenes, D. & Sobczyk, G., *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, Dordrecht/D. Reidel, 1984.

Hestenes, D., *New Foundations for Classical Mechanics*, Dordrecht/D. Reidel, 1986.

Hestenes, D., *Universal Geometric Algebra*, Simon Stevin, 63, pp. 253-274, 1988.

Hestenes, D. & Ziegler, R., *Projective Geometry with Clifford Algebra*, Acta Applicandae Mathematicae 23, pp. 25-63, 1991.

Naeve, A. & Svensson, L., *Geo-Metric-Affine-Projective Unification*, Ch. 5, pp.105-126, in Sommer (ed.), *Geometric Computing with Clifford Algebras*, Springer, 2001.